UN AUTRE REGARD

sur les

MATHÉMATIQUES

3

géométrie et relativité

Sylvain Poirier

Octobre 1996

Quelques détails...

i.e. = c'est-à-dire. Rappel :"espace" signifie "espace vectoriel", toujours de dimension finie ; dedans, une droite vectorielle, i.e. une droite contenant l'origine, sera souvent appelée une direction.

Caractériser un objet, c'est donner assez de renseignements sur lui pour le connaître : deux ojets qui se caractérisent de la même façon sont semblables.

Un isomorphisme est une transformation (une bijection) qui conserve toutes les propriétés.

1. Espaces proportionnels

Soit un espace E. Pour toute grandeur G, définissons le produit ax d'un vecteur $x \in E$ par une quantité $a \in G$ comme obéissant aux mêmes identités que le produit, déjà défini, d'un vecteur par un réel, si on remplace G par $\mathbb{R}$. On remarque que cela est évidemment cohérent s'il existe un systeme universel d'unités qui permet d'identifier toutes les grandeurs à $\mathbb{R}$, et ainsi d'interpréter ax comme étant un vecteur de E. Dans le cas général, on l'admettra.

Définissons l'espace GE comme étant l'ensemble des produits ax pour tous les $a \in G$ et $x \in E$. GE a même dimension que E. En effet, la multiplication par une quantite fixe u de G definit une bijection entre E et GE. Pour tout autre $a = ru \in G$, $ax = u(rx)$ et $rx \in E$. Deux espaces E et E' seront dits proportionnels s'il existe une grandeur G telle que $E' = GE$. Pour deux grandeurs G et G' on a évidemment $G(G'E) = (GG')E = GG'E$. En particulier, $E' = GE \Longleftrightarrow E = G^{-1}E'$.

Soient $a \in G$, $x \in E$, $f \in E^*$, $E' = GE$, $f' \in E'^*$, on a $\langle f|ax\rangle = a\langle f|x\rangle \in G$. Donc on écrira $\langle E^*|E'\rangle = G$: G est le produit scalaire de E^* et E'. On a également $E^* = GE'$: $\langle af'|x\rangle = \langle f'|ax\rangle \in R$.

Colinéarité ; Sous-espaces correspondants.

Deux vecteurs u et v non nuls seront dits colinéaires s'il existe une quantité a telle que $v = au$ (Nécessairement $a \neq 0$). Soient E un espace vectoriel, G une grandeur, $E' = GE$, et F un sous-espace vectoriel de E. GF s'identifie naturellement au sous-espace de E' formé des vecteurs colinéaires à des vecteurs de F, et de 0. Par abus de langage, on manipulera les sous-espaces à une proportionnalité près pour parler de leur somme, de leur intersection, etc.

2. Centre d'inertie

Soit A un espace affine, défini par une forme linéaire m d'un espace E. Soit M une grandeur dite des "masses", et $E' = ME$. On appliquera à E' ce que l'on a défini dans E, à savoir : x est un point pondéré si sa masse $m(x)$, qui est cette fois une quantité de M, est non nulle ; et sa position $x/m(x)$ est encore un point de A.

Pour tout système matériel immobile dans A, on appellera centre pondéré d'inertie (cpi) du système l'élément de E' ayant les propriétés suivantes (que l'on postule) : Le cpi d'une particule a même masse et même position que celle-ci. Le cpi d'un système est la somme des cpi des parties qui le composent. Sa masse est la masse du système, et sa position est ce qu'on appelle le centre d'inertie du système. Si un système possède un centre de symétrie, c'est évidemment son centre d'inertie.

Propriétés physiques du centre d'inertie

Si l'on place un système initialement immobile, isolé dans le vide en apesanteur, alors quels que soient ses mouvement internes, son centre d'inertie se conserve. Un solide initialement immobile tiré par un fil dont la droite qui le porte passe par son centre d'inertie G, subit un mouvement de translation. En particulier un solide suspendu par un fil est en équilibre si la droite portant le fil passe par G ; mais cet équilibre sera instable si le point d'attache est au-dessous de G.

Construction réciproque

Tout ce que l'on peut dire de l'espace E' construit ci-dessus est qu'il est muni d'un sous-espace H de dimension $n-1$, où $n = \dim E'$ (un tel sous-espace s'appelle un hyperplan) (en fait $H = MV$ où V est l'espace des vecteurs de A). On peut alors se demander s'il est possible de reconstituer A à partir de E'.

Du même coup on va voir ce qui ce passe en renversant le point de vue par dualité : soit un espace $F(= E'^*)$ muni d'une droite $D(= H^\perp)$. De D on fait une grandeur notée $\widetilde{D}$. A un vecteur $x \in D$ correspond une quantité $\widetilde{x} \in \widetilde{D}$. Alors pour tout x non nul de D le vecteur $\widetilde{x}^{-1}x$ est independant de x et sera noté 1_D. Pour tout x de D, $x = 1_D\widetilde{x}$.

Finalement, $M^{-1} = \widetilde{D}$ (ou encore $M = V/H$), $E = \widetilde{D}E'$ et $m = 1_D$. L'espace affine A s'obtient alors naturellement comme l'ensemble des positions d'éléments de F non dans H. On remarque que deux tels éléments ont même position ssi ils sont colinéaires.

3. Géométrie projective

On définira plus généralement la position (ou l'image) d'un vecteur non nul d'un espace vectoriel comme étant l'ensemble des vecteurs qui lui sont colinéaires. Pour tout espace E, on appellera espace projectif associé à E et on notera $P(E)$ ou $\underline{E}$ l'ensemble des positions des positions de ses éléments, ou pour être plus concret l'ensemble de ses droites vectorielles.

A des espaces proportionnels est donc associé le même espace projectif. On appelle bien sûr géométrie projective la géométrie d'un espace projectif.

Si la dimension de E est n, celle de $\underline{E}$ est $n-1$. On appellera sous-espace projectif (sep) de dimension p de $\underline{E}$ l'image d'un sous-espace de E de dimension $p+1$, ainsi une droite de $\underline{E}$ est l'image d'un plan, un hyperplan (de dimension $n-2$) celle d'un hyperplan (de dimension $n-1$), etc. Le dual de $\underline{E}$ est $\underline{E^*}$ et est identifiable à l'ensemble des hyperplans de $\underline{E}$. Trois points sont alignés s'il existe une droite qui les contient. Par deux points distincts passe une droite unique, et plus généralement si un point n'est pas dans un sep de dimension p, il existe un unique sep de dimension $p+1$ qui les contient (ceci résulte de $\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$). Par dualité on réénonce cela sous la forme : si un sep V de dimension p n'est pas inclus dans un hyperplan H, leur intersection est un sep de dimension $p-1$.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que si P est un espace projectif muni d'un hyperplan H, alors le complémentaire $A = P - H$ de H dans P est un espace affine de même dimension que P. H s'appelle alors l'hyperplan de l'infini de A (ou : droite de l'infini dans le cas d'un plan, etc.), et ses éléments, les points à l'infini. Un sous-espace affine de A est l'intersection de A et d'un sep V de P non inclus dans H. Sa direction est $V \cap H$. Deux sous-espaces affines sont parallèles s'ils ont la même direction.

On appelle repère projectif de $\underline{E}$ (de dimension $n-1$) la donnée de $n+1$ points tels que n d'entre eux ne sont pas dans un même hyperplan. En effet, prenons $n+1$ vecteurs de E dont ils sont images. Chacun est déterminé a un coefficient près. Les n premiers forment une base, dans laquelle le dernier a toutes ses composantes non nulles. En fixant ce dernier vecteur, il y a une seule maniere de corriger les vecteurs de base pour que toutes ses composantes soient 1. Si on multiplie ce vecteur par un nombre, tous les vecteurs de base sont multipliés par le même nombre, si bien que l'image projective d'un vecteur donné par ses composantes n'en dépend pas. On parle de coordonnées homogènes.

On appelle transformation projective d'un espace projectif $P = \underline{E}$ (c'est encore le même refrain) une transformation de P (i.e. bijection de P sur lui-même) qui conserve ses propriétés projectives. C'est l'effet sur P d'une transformation linéaire de E (qui est une transformation affine de E qui conserve son origine). Les transformations affines de $A(= P - H)$ sont les transformations projectives de P qui conservent globalement H ; celles qui conservent tout point de H sont les homothéties et les translations de A.

Pour faire une représentation en perspective de l'espace, on lui choisit une origine O comme Oeil ou Observateur, puis, du plan projectif obtenu (l'ensemble des droites passant par O, qui portent les rayons lumineux vus) on fait un plan affine. Ce qui était dessiné dans un plan de l'espace de départ a subi une transformation projective.

Soit D une droite vectorielle de E. La notion d'espace quotient se répercute sur $\underline{E}$: on définit l'espace projectif quotient $P/D = P(E/D)$, ensemble des droites de $\underline{E}$ passant par $\underline{D}$ qui est la position de l'observateur. Dans une représentation affine de P, si D est à l'infini, on retrouve la notion d'espace affine quotient ; si D est un point, c'est celle d'espace projectif à partir de l'espace vectoriel obtenu en prenant D pour origine.

Remarque : en utilisant une lentille d'une certaine manière on peut arriver à produire une image située plus loin que l'infini, du genre à un ou deux mètres derrière la tête. On se rend compte de cette distance négative (avec un seul oeil) à l'aide d'un mouvement de translation de la tête de droite à gauche : l'image se déplace alors dans le même sens. Une image peut paraître plus ou moins floue suivant les yeux des individus ; en fait, la distance optimale de beaucoup de personnes à partir d'un certaine âge est de cette sorte, et les lunettes jouent alors précisément le rôle ci-dessus.

Opérations sur une droite projective

Les tranformations d'une droite projective s'expriment numériquement dans un repère. Un repère est constitué de 3 points distincts A, B, C : A sert de point à l'infini, le reste forme une droite affine où l'on choisit B comme origine et C comme unité, et l'abscisse de tout point D dans ce repère (dite abscisse projective) s'appelle le birapport de A, B, C, D et se note $[A,B,C,D]$. C'est le rapport des composantes de D dans la base construite ci-dessus.

Considérons deux bases du dual : (x,y) et (x',y'), et repérons un point de la droite projective par son abscisse x sur la droite $y=1$, autrement dit par le rapport $X=\frac{x}{y}$, pour chaque base. Si $x'=ax+by$ et $y'=cx+dy$, alors le changement d'abscisse projective s'écrit $X'=\frac{aX+b}{cX+d}$. Cette transformation s'appelle une homographie (avec $ad-bc\neq 0$).

Si $c\neq 0$, on se ramène au cas $c=1$ et $X'-a=\frac{b-ad}{X+d}$, donc à l'opération d'inverse, à des transformations affines près.

Faisons maintenant le calcul du birapport, en identifiant les points A, B, C, D à leurs abscisses projectives. Déjà, l'homographie $\frac{X-B}{X-A}$ envoie A sur ∞ (l'infini) et B sur 0 comme il se doit. Il reste à choisir la bonne unité en divisant le tout par l'image de C :

$$[A,B,C,D]=\frac{D-B}{D-A}\,\frac{C-A}{C-B}.$$

On peut remarquer que $[A,B,C,D]=[B,A,D,C]=[C,D,A,B]=[D,C,B,A]$ (cela peut aussi se comprendre géométriquement de plusieurs manières...)

Pour finir, mentionnons deux propriétés de la géométrie projective :

1) Identifier les espaces projectifs de deux espaces vectoriels (d'une manière qui respecte toutes les propriétés*) rend ceux-ci proportionnels (et donc on peut reconstituer l'espace vectoriel d'un espace projectif P, à une proportionnalité près, en prenant un nouvel espace vectoriel dont on identifie l'espace projectif à P).

2) Etant donné un espace projectif de dimension au moins 2, la relation d'alignement suffit à reconstituer toutes ses propriétés.

Pour donner une idée de la difficulté du point 2) : il faudrait choisir un repère et démontrer que l'image de tout vecteur ayant des composantes rationnelles dans ce repère peut se construire “à la règle”, à force de tracer des droites passant par deux points, qui se coupent en de nouveaux points (c'est long !), après quoi les autres points se définissent topologiquement. Or la topologie se définit en termes d'inégalités, et un réel est positif s'il est le carré d'un autre. On peut construire à la règle le carré d'un réel, mais pas sa racine carrée...

Remarques :

Si on voulait étendre la notion d'espace projectif aux espaces complexes, par exemple (qu'on définira plus tard), le 2) est encore plus compliqué : l'ensemble des complexes est à reconstituer, avec son orientation, et aussi sa topologie à partir de celle de l'espace projectif (le signe ne se distingue plus par l'existence d'une racine carrée). Mais en pratique, on n'a pas à se préoccuper de ce probleme de topologie qui ne se pose pas dans la nature (il ne peut se poser qu'avec l'axiome du choix).

On pourrait définir une notion voisine de celle d'espace projectif qui correspondent aux demi-droites vectorielles, et en disant que deux vecteurs ont la même image s'ils sont colinéaires de même sens, i.e. si l'un est le produit de l'autre par une quantité positive.

* Ici, le birapport et l'alignement suffisent pour exprimer les autres, comme par ex. les coordonnées dans un repère

4. Espace euclidien.

Soit E un espace (vectoriel) euclidien (Ce n'est encore ici qu'un objet expérimental de dimension 2 ou 3). Pour tout vecteur v de E, on note $||v||$ (norme de v) sa longueur, c'est-à-dire sa distance à l'origine. C'est une quantité dont la grandeur, ne dépendant que de E, sera notée $||E||$ (norme de E).

Tout espace proportionnel à un espace euclidien est euclidien et pour toute grandeur G, $||GE|| = |G|\ ||E||$. On va voir que tout espace euclidien est naturellement proportionnel à son dual, avec $\forall\, x \in E$, $\langle x|x\rangle = ||x||^2$. (Cette convention entraîne $\langle x|x\rangle \geq 0$, ce qui ne reste vrai dans un espace GE que si $\forall\, a \in g$, $a^2 \geq 0$; on notera pour abréger $\langle x|x\rangle = Q(x) \in \langle E^2\rangle$.)

Posons d'abord qu'un vecteur v et une forme linéaire f sont colinéaires si la droite que dirige v est perpendiculaire à l'orthogonal de f, i.e. à son hyperplan de niveau 0. De plus, disons qu'ils ont le même sens si leur produit scalaire est positif.

Dans le cas de la dimension 3, cela suffirait à prouver que cette proportionnalité existe bien, car c'est une identification entre leurs espaces projectifs qui conserve l'alignement : 3 vecteurs de E sont dans un même plan ssi il existe une droite (perpendiculaire à ce plan) à la fois perpendiculaire a ces vecteurs, donc dont l'orthogonal contient les formes linéaires correspondantes.

Du même coup cela prouverait la proportionnalité pour la dimension 2 (par restriction) mais nous allons le vérifier autrement.

Revenons au cas général. Etant donnée une forme linéaire f, on peut mesurer la distance entre ses plans de niveau 0 et 1. lorsqu'on multiplie f par un réel a, cette distance se divise par $|a|$. Définissons $||f||$ comme valant l'inverse de cette distance.

La proportionnalité souhaitée se construit ainsi : pour $f \in E^*$ et $x \in \langle E^2\rangle$, $v = xf \in E$ devra vérifier $||v|| = |x|\ ||f||$ (on doit attendre cela de toute proportionnalité). v est déterminé ainsi par sa direction, son sens et sa norme.

Vérifions que cela est cohérent. $\forall\, c \in \langle E|E\rangle$, notons $c^{-1}x$ la forme linéaire construite d'après le procédé ci-dessus. Cette correspondance entre E et E^* pour c fixé est bien une bijection. Alors la quantité $c\langle c^{-1}x|y\rangle$, qu'on notera $\langle x|y\rangle$, ne dépend pas de c et pour rout réel a, $\langle ax|y\rangle = a\langle x|y\rangle$. Il reste à vérifier que $\langle x+x'|y\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x'|y\rangle$ (i.e. que cette "proportionnalité" conserve l'addition). Il existe a tel que x et ay aient même norme, donc forment une paire symétrique : $\langle x|ay\rangle = \langle ay|x\rangle \Rightarrow a\langle x|y\rangle = a\langle y|x\rangle$. D'où la relation de symétrie du produit scalaire : $\langle y|x\rangle = \langle x|y\rangle$

Enfin, $\langle x + x'|y\rangle = \langle y|x + x'\rangle = \langle y|x\rangle + \langle y|x'\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x'|y\rangle$. La proportionnalité est enfin démontrée.

La symétrie du produit scalaire signifie en fait que l'"autre" relation de proportionnalité donnée généralement par $E' = GE \Rightarrow E^* = GE'^*$ est ici confondue avec la première, si $E' = E^*$.

Définition générale d'un espace euclidien.

C'est un espace proportionnel a son dual, où le produit scalaire est symétrique, et où tout vecteur non nul a un carré scalaire strictement positif.

La norme d'un vecteur est par définition

$$||x|| = +\sqrt{Q(x)}$$

Ceci définit la géométrie sans ambiguité pour chaque dimension. Pour le vérifier, nous allons construire une base orthonormée d'un tel espace euclidien E de dimension n (en confondant abusivement des espaces proportionnels), c'est-à-dire une base formée de vecteurs unitaires (= de norme 1) et deux à deux orthogonaux.

Soit $x \in E$ non nul, et prenons $x/||x||$ comme premier vecteur de base. On recommence avec l'orthogonal de x, exactement n fois, puisque la dimension diminue de 1 à chaque fois.

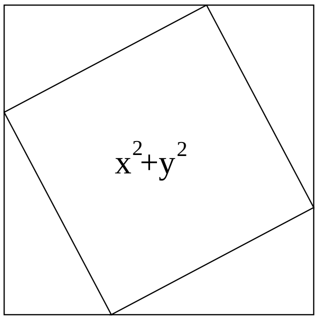
On obtient ainsi n vecteurs qui forment une base orthonormée. On remarque que les bases orthonormées sont celles égales à leur propre base duale. Il est en effet immédiat que le produit scalaire avec un vecteur de base redonne la composante correspondante.

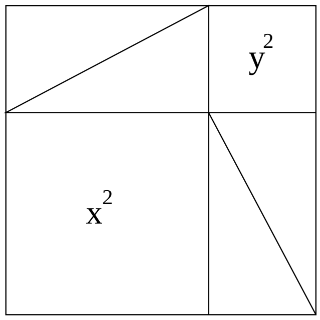
En général, l'expression "base orthonormée" est un abus, car ses éléments ne sont pas des vecteurs de E mais de $||E||^{-1}E$; les composantes d'un vecteur dans cette "base" ne sont que des quantités. Mais on l'employera quand même.

Cette base une fois donnée suffit a définir la proportionnalité de E et E^*. (par le fait qu'elle est égale à sa propre base duale...)

On en déduit immédiatement le théorème de Pythagore : si x,y,z,... sont les composantes d'un vecteur v dans une base orthonormée, alors

$$||v||^2 = Q(v) = x^2 + y^2 + z^2 + \cdots$$





5. Espace-temps classique

Définition : On appelle espace-temps classique un espace affine E de dimension 4 tel que : L'espace V de ses vecteurs est muni d'un sous-espace S de dimension 3 (hyperplan) qui est un espace euclidien ; et la grandeur $T = V/S$ est orientée.

T est la grandeur des durées ; le sens positif de l'orientation correspond au futur... La droite quotient E/S est appelée la droite du temps. Les éléments de S sont des vecteurs spatiaux, et la grandeur $||S||$ est celle des longueurs. Comme S est un hyperplan de V, on en déduit comme précédemment un espace affine euclidien de dimension 3 (inclus dans $T^{-1}V$) dont les points sont appelés des référentiels (galiléens). Si R et R' sont deux référentiels, le vecteur $\overrightarrow{RR'}$ $(= R' - R \in T^{-1}S)$ s'appelle le vecteur vitesse de R' par rapport à R.

Expériences autour de la géométrie euclidienne.

Soit une tige verticale fixée sur un support horizontal. Posons ce support sur un plan faiblement (infiniment peu) incliné. La pente, en tant que mesure de l'altitude sur les points du plan (relativement à un point origine donné), est proportionnelle à une forme linéaire. Elle est également proportionnelle, dans le plan horizontal, au vecteur que forme la tige vue du dessus à la verticale, et aussi au vecteur accélération d'une bille roulant sur ce plan.

Une force se représente suivant les contextes, soit comme un vecteur, soit comme une forme linéaire. Prenons l'exemple de la force de pesanteur $\overrightarrow{f} = m\overrightarrow{g}$ (m : masse de l'objet). $\overrightarrow{g}$ est le vecteur d'accélération de pesanteur : c'est l'accélération $d\overrightarrow{v}/dt$ d'un objet en chute libre. Sa norme vaut $g = 9,81 m.s^{-2}$ à la surface de la terre (diminuant faiblement du pôle vers l'équateur). L'énergie potentielle de pesanteur d'un objet de masse m à l'altitude x vaut $E = mgz$. On trouve donc la forme linéaire gz correspondant à $\overrightarrow{g}$, mais de sens opposé.

La mesure de la pression dans un liquide au repos est une forme linéaire proportionnelle à la première. C'est une énergie potentielle volumique (un rapport énergie/volume), au lieu d'une énergie potentielle massique, le rapport étant donné par la masse volumique du liquide, et variant dans le sens opposé : cela traduit la poussée d'Archimède.

Passons maintenant au théorème de Pythagore. En voici une démonstration physique : On démontre qu'en mécanique classique l'énergie cinétique s'écrit $E = mv^2/2$. Mis à part le facteur 2, on peut expliquer cette expression par le raisonnement suivant. Une énergie E est nécessaire pour envoyer une masse m à la vitesse v. Si cette masse éclate en deux avec la même énergie, les morceaux sont envoyés à la même vitesse dans deux sens opposés pour un observateur qui allait à même vitesse que la masse. Si c'est dans la même direction que la vitesse initiale, une moitié redevient immobile et l'autre acquiert une vitesse double. Donc pour doubler la vitesse il faut quadrupler l'énergie (l'appliquer deux fois à une masse double). On peut démontrer de même que si la vitesse est triplée, l'énergie est multipliée par 9. Ce qui démontre la formule (En fait les formules plus haut suffisent à l'établir, par homogénéité ; d'autre part on redémontrera cela à la fin de cet exposé). Si maintenant on recommence l'expérience en faisant éclater la masse dans une direction orthogonale a la vitesse initiale, on en déduit immédiatement le théorème de Pythagore.

6. Grandeurs complexes conjuguées.

Définition. G étant une grandeur complexe, on appellera conjuguée de G la grandeur complexe $\overline{G}$ obtenue en renversant son orientation. A tout $x \in G$, correspond son conjugué $\overline{x} \in \overline{G}$. Cela se traduit, suivant la définition du produit d'une quantité complexe par un nombre complexe, par : $\forall\, a \in \mathbb{C}$, $\overline{ax} = \overline{a}\,\overline{x}$, où $\overline{a}$ est le conjugué de a selon la définition antérieure.

L'ensemble $\mathbb{C}$ étant fixé, soit P un plan euclidien. Il y a deux manières de faire de P une grandeur complexe, selon la manière de relier les orientations de $\mathbb{C}$ et de P. On obtient donc une paire $\{G, \overline{G}\}$ de grandeurs complexes conjuguées, liée au produit (au sens de n° 2, paragraphe 3) des orientations de $\mathbb{C}$ et de P. Un point M de P se représente par deux quantités complexes conjuguées $x \in G$ et $\overline{x} \in \overline{G}$. Pour imiter les nombres complexes on a envie d'écrire $||M||^2 = x\overline{x}$.

Remarquons d'abord que la grandeur $G\overline{G}$ est conjuguée d'elle-même car la conjugaison est distributive sur toute opération. On peut donc décomposer ses éléments en parties réelle et imaginaire. En particulier, $x\overline{x}$ est sur l'"axe réel", car conjugué de lui-même. On identifie cet axe réel à la grandeur $\langle P^2 \rangle$ définie précédemment, en convenant que les quantités de la forme $x\overline{x}$ sont positifs. Etant donnés $x, y \in G$ représentant deux vecteurs du plan euclidien, décomposons donc $\overline{x}y$ en ses parties réelle et imaginaire, en choisissant une unité de G.

$$x = a + ib, y = a' + ib' \Rightarrow \overline{x}y = (aa' + bb') + i(ab' - ba')$$

On reconnaît le produit scalaire $aa' + bb'$ des deux vecteurs. On obtient d'autre part leur déterminant $ab' - ba'$.

On peut le comprendre de la manière suivante. $\overline{x}y = (x\overline{x})(y/x)$. Or $\mathrm{Re}(y/x)$ est la forme linéaire de y qui est "colinéaire" à x et dont la droite de niveau 1 passe par x. Il reste à la multiplier par $(x\overline{x})$ pour qu'elle ait la même norme que x.

$\overline{x}y$ est le produit scalaire hermitien de x et y. La notion de produit scalaire hermitien se définit en général sur des espaces complexes de dimension quelconque.

7. Espace quadratique

Définition. On appellera espace quadratique un espace proportionnel à son dual, et où le produit scalaire est symétrique.*

Un espace affine quadratique sera un espace affine dont l'espace des vecteurs est quadratique. Les espaces euclidiens en sont des exemples. Pendant qu'on y est, voici une notion voisine : si le produit scalaire est antisymétrique, i.e. $\langle x|y\rangle = -\langle y|x\rangle$, alors l'espace est dit symplectique. Par exemple tout espace de dimension 2 est symplectique, avec comme "produit scalaire" le déterminant.

Nous allons à présent classifier les espaces quadratiques (C'est un arrangement du théorème d'inertie de Sylvester).

Soit E un espace quadratique de dimension n. Notons $Q(x) = \langle x|x\rangle$ le carré scalaire de x pour $x \in E$. On ne s'occupera que des vecteurs non nuls.

On dit que x est **isotrope** si $Q(x) = 0$. L'ensemble des vecteurs isotropes s'appelle le **cône isotrope**. Appelons **genre** d'un vecteur x (ou de sa direction) le signe de $Q(x)$. Appelons sous-espace euclidien un sous-espace dont tous les vecteurs sont non isotropes et de même genre, qui est alors le genre du sous-espace. (En fait il suffirait de dire qu'ils sont non isotropes...) C'est un espace quadratique grâce au lemme suivant :

Lemme et définition. Un sous-espace F de E sera dit quadratique ou régulier (sinon, on le dira isotrope ou singulier) s'il verifie les propositions suivantes, qui sont équivalentes :

---

* La définition usuelle d'un espace quadratique est légèrement différente : le produit scalaire de deux vecteurs est toujours un nombre réel, mais l'espace est considéré comme distinct de son dual.

i) Le produit scalaire de vecteurs de F calculé en tant que vecteurs de E fait de F un espace quadratique.

ii) $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ (et donc $F + F^{\perp} = E$ car $\dim F + \dim F^{\perp} = dim E$).

Donc si F est quadratique, alors $F^{\perp}$ l'est également.

i)$\Rightarrow$ ii) : tout vecteur non nul $x \in F$ est proportionnel à une forme lineaire non nulle sur F (ce qui est vrai pour un sous-espace euclidien car $\langle x|x\rangle \neq 0$), donc $x \notin F^{\perp}$.

ii)$\Rightarrow$ i) : on a vu au numéro 2, espaces doubles, que F^* s'identifie à $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Tout sous-espace euclidien a donc une géométrie d'espace euclidien. En effet, il suffit de changer de convention en multipliant les produits scalaires par un signe constant pour se ramener à la définition donnée précédemment.

Une base orthogonale d'un espace quadratique est une base dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux, et non isotropes (si l'un d'eux était isotrope, il serait orthogonal à toute la base, et donc à tout l'espace, ce qui est absurde). Elle se construit en choisissant un premier vecteur non isotrope : il en existe tant que la dimension est non nulle car il existe x et y tels que $\langle x|y\rangle \neq 0$, or on a $2\langle x|y\rangle = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$. (ce qui serait faux dans un espace symplectique) Grâce au lemme, son orthogonal est un espace quadratique et on recommence.

En regroupant les p vecteurs d'un genre et les $n-p$ de l'autre, on trouve deux sous-espaces euclidiens de dimensions p et $n-p$. Or quels que soient F et G sous-espaces euclidiens de genres contraires, $\dim F + \dim G = dim(F \cap G) + \dim(F+G) = \dim(F+G) \leq n$, donc p et $n-p$ sont les dimensions maximales des sous-espaces euclidiens de chaque genre.

Théorème. Un espace quadratique E se caractérise par le couple (p,q) appelé signature de E, dont la paire des positions représente le signe de $\langle E^2\rangle$, avec $p+q = \dim E$, et les nombres p et q sont les dimensions maximales des sous-espaces euclidiens de chaque genre.

De plus il est évident que si F est un sous-espace quadratique de E de signature (p', q') alors celle de $F^{\perp}$ est $(p-p', q-q')$.

Remarque : si on change de convention en inversant le signe de $\langle E^2\rangle$ (autrement dit, si on multiplie tous les vecteurs par i avec $i^2 = -1$), les nombres p et q échangent leur rôle. Ainsi, les signatures (p,q) et (q,p) correspondent à la même géométrie, qui est donc décrite par la paire $\{p,q\}$.

Si $p \neq q$, le signe de $\langle E^2\rangle$ n'est pas symétrique lorsqu'on considère l'espace E car p n'est pas semblable à q. On peut alors choisir une convention de signe, en orientant $\langle E^2\rangle$. Alors, noter (p,q) la signature signifie que les sous-espaces euclidiens maximaux de genre positif sont de dimension p, et ceux de genre négatifs, q.

8. Grandeur double.

On appelle **espace artinien** un espace quadratique de signature (n,n) pour un certain n. Nous allons voir qu'un plan artinien (signature $(1,1)$) a la même géométrie qu'un espace double de dimension 1+1 (ou grandeur double).

Soit E un plan artinien : le carré scalaire s'écrit $t^2 - x^2 = (t+x)(t-x)$. Les vecteurs isotropes forment deux droites, d'équations $t + x = 0$ et $t - x = 0$, dont E est somme directe.

Réciproquement, prenons deux grandeurs G et H, et soit la grandeur double $E = G \oplus H$. Soient $z, z' \in E$, $z = (u, v)$, $z' = (u', v')$ deux quantités doubles ($u \in G$, etc.). Pour imiter les grandeurs complexes posons $\langle z|z'\rangle = Re(\overline{z}z') = (uv' + vu')/2$ donc $\langle z|z\rangle = uv$: on retrouve la structure de plan artinien ci-dessus en posant $u = t + x$ et $v = t - x$, ou encore, en choisissant le vecteur de composantes $(t = 1, x = 0)$ comme unité de E, $z = t + x\hat{\imath}$.

Deux droites vectorielles de E sont orthogonales ssi elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à G parallèlement à H (cette symétrie s'effectue par multiplication par $\hat{\imath}$).

L'ensemble des points à une même "distance" non nulle de l'origine (l'équivalent d'un cercle pour cette géométrie) est une hyperbole, d'équation $uv = cste$ (constante), ou $t^2 - x^2 = cste$; ses asymptotes sont les droites $u = 0$ et $v = 0$. (ce sont ses tangentes à l'infini).

Une rotation d'angle (hyperbolique) φ s'obtient en multipliant par $\exp(\hat{\imath}\varphi)$; Cela correspond à un changement de référentiel, avec une vitesse égale à $\mathrm{th}(\varphi)$ (ou si on préfère, $c.\,\mathrm{th}(\varphi)$, c étant la vitesse de la lumière).

9. Relativité restreinte.

On appelle espace-temps de Minkowski (i.e. de la relativite restreinte) un espace affine quadratique de signature $(3, 1)$ ou $(1, 3)$, pour : "3 dimensions d'espace et une de temps". Ses points sont parfois appelés "évènements" et ses vecteurs "quadrivecteurs". Les vecteurs peuvent être de genre temps, de genre espace ou isotropes. Un référentiel ("galiléen") est une direction du genre temps.

L'évolution d'une particule dans l'espace-temps se décrit par une ligne appelée ligne d'univers. En tout point, la direction de la tangente à la courbe est du genre temps : c'est le référentiel pour lequel la particule prend une vitesse nulle à cet instant. Le temps vécu par la particule est l'analogue de la longueur d'une courbe en géométrie euclidienne. Le cône isotrope s'appelle aussi le cône de lumière, car les directions isotropes sont celles des lignes d'univers des photons ou de toute particule allant à la vitesse de la lumière (qu'on pose égale à 1 pour simplifier).

Un référentiel se désigne également par un vecteur ou une forme linéaire t unitaire du genre temps orienté vers le futur. Mais pour cela, Il faut choisir une orientation du temps, qui jusqu'ici était symétrique.

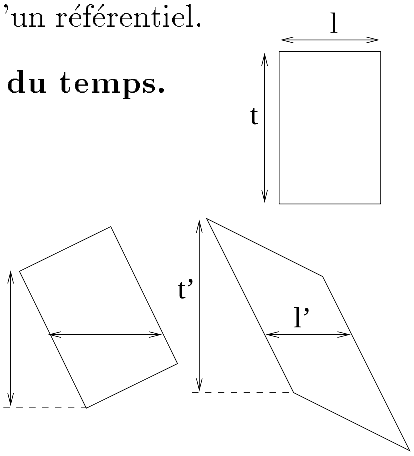
L'ensemble des vecteurs isotropes ou de genre temps a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$. Il se sépare en deux morceaux, l'un passé ($t < 0$) et l'autre futur ($t > 0$), qui ne se touchent qu'à l'origine. Cette séparation est indépendante du référentiel, autrement dit de la forme linéaire t du genre temps utilisée.

C'est évident avec une dimension de moins (on imagine le cône...). En général on le démontre, soit par le fait qu'il n'y a effectivement que deux morceaux, car on passe d'un vecteur du genre temps à un autre ou son opposé de façon continue (dans le plan artinien qui les contient), soit en considérant directement un autre référentiel t' : si on a bien choisi sa base, $t' = at + bx$, avec $a > |b| > 0$ et $a^2 - b^2 = 1$. Le morceau futur vérifie $x^2 \leq t^2$ et $t > 0$, d'où $t' > 0$.

Par contre on ne peut dire si un vecteur du genre espace pointe vers le futur ou le passé ou s'il est simultané indépendamment du choix d'un référentiel.

Contraction des longueurs et ralentissement du temps.

On peut d'abord voir ce qui se passe en remplaçant le temps par de l'espace, autrement dit en changeant la signature pour se ramener à un phénomène élémentaire de géométrie euclidienne, puis on revient à la bonne signature et on constate que l'opération cos devient ch, ce qui donne un effet en sens contraire...



10. L'horizon d'un trou noir.

En relativité générale on a affaire à un espace-temps courbe, mais cette courbure devient insensible à petite échelle. Nous allons voir ici ce qui se passe au voisinage immédiat de l'horizon d'un trou noir. Il ne s'y trouve pas de singularité ; la courbure n'y est sensible qu'à l'échelle du rayon du trou noir. Donc la coubure n'intervient pas ici, et la relativité restreinte s'applique. Soit donc un trou noir de Schwarzchild, c'est-à-dire avec une symétrie sphérique.

Définissons le paramètre R, mesure de l'altitude, de la manière suivante : Soit un plan de symétrie. L'ensemble des points de ce plan ayant une même altitude forme un cercle de longueur l. Par définition on pose $2\pi R = l$. On a aussi : la sphère constituée des points de l'espace ayant la même altitude a pour aire $4\pi R^2$. Chose remarquable : la courbure de l'espace-temps est proportionnelle à R^{-3}.

Revenons à l'horizon. la valeur de R y est non nulle : prenons-la comme unité. Oublions les dimensions horizontales pour ne retenir que la verticale et le temps. On a donc une description du voisinage de l'horizon à deux dimensions, dans un plan artinien. En fait, seul un demi-plan est bien réel, d'équation $u > 0$. On trouve que $1 - R = uv$ dans l'approximation où v est infiniment petit (et u est normal). L'horizon a donc pour équation $v = 0$.

Si $v < 0$, on est à l'extérieur du trou noir. Passons aux coordonnées polaires* (z, t), définies par :

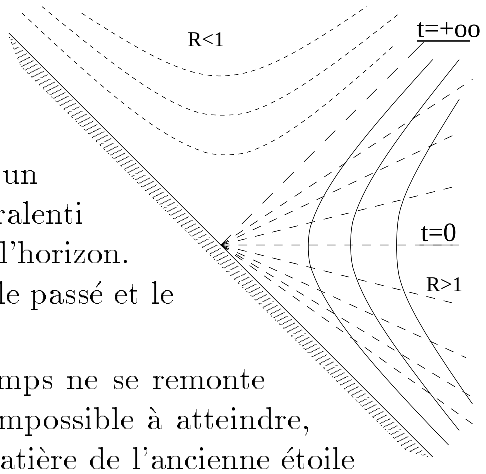
$$(u, v) = \hat{\imath} z e^{\hat{\imath} t}.$$

z est une autre mesure de l'altitude : $z^2 = R - 1$. C'est la distance à l'origine $(u = 0 = v)$. L'équation $z = \textit{constante}$ définit une hyperbole de rayon z. C'est la ligne

* Dans le plan euclidien identifié au plan complexe, les coordonnées polaires sont le module et l'argument : (r, θ) tels que $z = re^{i\theta}$

d'univers d'une particule qui résiste à la pesanteur. Elle subit une accélération égale à $1/z$ (vers le haut) : c'est l'opposé de l'accélération de pesanteur.

t est le temps absolu, mesuré par un observateur éloigné du trou noir (par exemple en moyennant les dates d'émission et de réception d'une impulsion lumineuse réfléchie en ce point).



Le temps relatif à la particule ci-dessus, initialisé à $t = 0$, vaut zt (calcul analogue à celui de la longueur d'un arc de cercle en géométrie euclidienne). On rappelle que z est un infiniment petit. On en déduit que le temps est ralenti à l'approche du trou noir, jusqu'à "s'arrêter" à l'horizon. Remarquons qu'il n'y a pas de dissymétrie entre le passé et le futur à l'extérieur du trou noir ($R > 1$).

A l'horizon, on a $t = +\infty$ (l'infini), et le temps ne se remonte pas ! La droite d'équation $u = 0$ est un "mur" impossible à atteindre, car elle correspond à $t = -\infty$: il s'y trouve la matière de l'ancienne étoile qui a donné naissance au trou noir, et toute matière qui y est tombée ensuite. Après un temps suffisant, plus rien ne peut en provenir.

En dessous ($v > 0$), on constate que R décroît inéluctablement pour tout système qui s'y trouve.

11. Quantité de mouvement et mécanique quantique.

A tout système mécanique on associe son quadrivecteur quantité de mouvement. C'est un vecteur qui se conserve, du genre temps et orienté vers le futur ; il s'additionne lorsqu'on regroupe des systèmes. Celui d'une particule est tangent à sa ligne d'univers. Dans un référentiel, on distingue sa composante temporelle qui est l'énergie, et sa partie spatiale qui est le vecteur quantité de mouvement usuel. Sa norme s'appelle la masse du système. Elle est donc généralement différente de la somme des masses des constituants.

La notation $\langle\ |\ \rangle$ employée jusqu'ici est en fait celle employée en mécanique quantique pour le produit scalaire hermitien dans des espaces de Hilbert, qui sont des espaces complexes et généralement de dimension infinie. Le produit scalaire de vecteurs de l'espace euclidien ou de quadrivecteurs se note par un point. De plus, c'est la signature $(3, 1)$ qui est employée.

Ces précisions faites :

En mécanique quantique, une particule qui a une quantité de mouvement p bien définie est décrite par une onde dans l'espace-temps de la forme $\psi(x) = \exp(ix.p/\hbar) * cste$, où x est le vecteur position. Ainsi, la quantité de mouvement apparaît bien plus directement comme une forme linéaire que comme un vecteur. Cela donne une onde de fréquence E/h (avec $h = 2\pi\hbar$) pour une particule d'énergie E.

Cas des photons : un photon se décrit comme une particule allant à la vitesse de la lumière, mais aussi comme une onde se propageant à la même vitesse. Dessinons dans le plan (z, t) le vecteur quantité de mouvement et les lignes de l'onde (ensembles de points où le champ s'annule ou passe par telle valeur). Appliquons-y une rotation hyperbolique : multiplication par $\exp(\hat{\imath}\varphi)$. Lorsque le vecteur quantité de mouvement se multiplie par $\exp(\varphi)$, les lignes d'onde se rapprochent du même facteur, donc la fréquence se multiplie par $\exp(\varphi)$. Ainsi est confirmée dans le cas du photon la proportionnalité de la quantité de mouvement et de la forme linéaire définissant l'onde correspondante. $\exp(\varphi)$ est donc la mesure de l'effet Doppler.

Imaginons que l'on envoie depuis l'espace un photon ou toute autre particule vers la surface d'un corps massif, avec une énergie bien définie. La force de pesanteur accélérera cette particule dans son trajet, si bien qu'elle arrivera avec une énergie plus grande. (Le rapport des énergies envoyées et recues ne dépend pas de la particule, afin que la conservation globale de l'énergie soit vérifiée : une énergie immobile près d'un corps massif "vaut moins cher" qu'une énergie éloignée, car c'est de la masse et pour l'éloigner il faut dépenser de l'énergie.) Passons à l'interprétation ondulatoire : les plans d'onde se déplacent tous à la même vitesse, autant sont émis et sont recus. La fréquence de l'onde émise et de l'onde recue de peuvent donc différer que parce que le temps ne s'écoule pas à la même vitesse dans l'espace et au niveau du sol à cause de la gravitation ; on l'a déjà constaté au paragraphe précédent.

12. Propriétés des sous-espaces isotropes.

Rappelons qu'un sous-espace isotrope F d'un espace quadratique E de signature (p, q) est isotrope ssi $F \cap F^\perp \neq \{0\}$. Il sera dit totalement isotrope si $F \in F^\perp$. On abrègera SETI=sous-espace totalement isotrope.

Pour tout sous-espace F, on définit son noyau $F' = F \cap F^\perp$ qui est un SETI. On peut vérifier que le produit scalaire de deux vecteurs de F ne dépend que de leur image dans l'espace quotient F/F', qui est ainsi un espace quadratique.

On peut donc caractériser la géométrie de F par la signature de F/F' et la dimension de F (ou de F') (en fait cela caractérise F complètement, c'est-à-dire dans E).

Les SETI sont les sous-espaces dont tous les vecteurs non nuls sont isotropes. Remarquons qu'un SETI ne pouvant rencontrer un sous-espace euclidien qu'en 0, sa dimension ne peut pas dépasser p ou q.

Soit G un supplémentaire de F' dans $F + F^\perp$: c'est un sous-espace quadratique (car $F + F^\perp = F'^\perp$, ou encore car G est somme directe des sous-espaces quadratiques orthogonaux $F \cap G$ et $F^\perp \cap G$ supplémentaires de F' dans F et $F^\perp$ respectivement). On remarque alors que F' est un SETI de l'espace quadratique $G^\perp$ et $\dim G^\perp = 2 \dim F'$, donc $G^\perp$ est un espace artinien. On en déduit, en notant (p', q') la signature de F/F' et $n = \dim F'$, que la signature de $F^\perp/F'$ est $(p - p' - n,\ q - q' - n)$.

13. Géométrie projective associée à un espace quadratique.

Soit E un espace quadratique de dimension $n+1$ et $P = \underline{E}$. La notion d'orthogonalité dans E se retrouve dans P. On désigne couramment cela par le terme de "conjugaison" : F étant un sous-espace de E ou de P, $F^\perp$ désignera un sous-espace de E, et on notera $F^{\underline{\perp}} = \underline{F^\perp}$ le sous-espace de $\underline{E}$ correspondant.

Le conjugué d'un sous-espace de dimension p est de dimension $n-p-1$. Le point conjugué d'un hyperplan s'appelle son pôle, et réciproquement on parle de l'hyperplan polaire d'un point.

Cas où E est euclidien de dimension 3.

La géométrie d'une sphère d'un espace euclidien s'appelle la géométrie sphérique. C'est celle de la surface terrestre, mais aussi celle de l'image du ciel étoilé, qui se définit plutôt comme étant l'ensemble des demi-droites d'origine la Terre, considérée comme ponctuelle. C'est l'exemple le plus simple de géométrie courbe. La géométrie de $\underline{E}$ s'appelle la géométrie elliptique ; elle diffère de la géométrie sphérique par le fait qu'on identifie les points opposés. Le pôle d'une droite est l'image des deux pôles lorsque cette droite définit l'équateur d'une sphère de E.

Désormais on excluera le cas où E est euclidien. Notons $(p+1, q+1)$ sa signature.

Soit C l'ensemble des points isotropes de P. C'est une surface de dimension n qui sépare P en ses deux parties correspondant aux deux genres de points.

Il y a dans P au plus quatre sortes de droites : les droites coupant C en deux points correspondent aux plans artiniens de E ; celles ne rencontrant pas C, aux plans euclidiens ; celles tangentes à C, aux plans isotropes dont le noyau, de dimension 1, est le point de tangence ; celles contenues dans C, aux plans totalement isotropes.

Nous allons voir comment la relation de conjugaison se traduit à l'aide de C.

Dans une droite coupant C aux points A et B, deux points M et N sont conjugués ssi $[A, B, M, N] = -1$.

Si $A \in C$, alors un point M est conjugué à A ssi la droite (AM) est tangente en A à C. En effet, soient a et m des représentants dans E, et ε un nombre infiniment petit, alors la tangence de (AM) à C se traduit par : le terme d'ordre 1 de $Q(a+\varepsilon m)$ est nul, soit $\langle a|m\rangle = 0$. L'hyperplan polaire de A est donc simplement l'hyperplan tangent en A à C. Plus généralement un sous-espace de P est isotrope ssi il est tangent à C, et son noyau est l'ensemble des points de tangence.

> *On appelle espace engendré par une partie X d'un espace E le plus petit sous-espace F de E contenant X. Il existe alors une base de F constituée d'éléments de X, et $F^{\perp}$ est l'intersection des orthogonaux des éléments de X.*

Soit un sous-espace projectif F de P contenant des points des deux genres. On peut montrer que cela équivaut à : $F \cap C$ engendre F ; d'où l'on déduit que $F^{\underline{\perp}}$ est l'intersection des hyperplans tangents aux points de $F \cap C$, ou à $1 + \dim F$ d'entre eux qui engendrent F (car F figure un sous-espace de E de dimension $1 + \dim F$). Réciproquement, F est engendré par les points de tangence des sous-espaces de P qui contiennent $F^{\underline{\perp}}$.

On peut toujours se ramener au cas ci-dessus par le truchement d'autres sous-espaces...

Notation : *pour tout point S de P on note (S) l'ensemble $S^{\underline{\perp}} \cap C$.* C'est l'ensemble des points M de C tels que la droite (SM) est tangente à C en M.

14. Représentation affine de C.

Fixons un point $I \in C$. L'espace affine $A = P - I^{\underline{\perp}}$ possède la direction privilégiée I. Toute droite passant par I non inclue dans $I^{\underline{\perp}}$ recoupe C en un point et un seul. Ainsi, l'espace quotient $B = A/I$ est identifiable à $B' = C - (I)$. C'est un espace affine quadratique : en effet l'espace de ses vecteurs est proportionnel à $I^{\perp}/I$ qui est un espace quadratique de signature (p,q), car $I^{\perp}$ est isotrope, de noyau I.

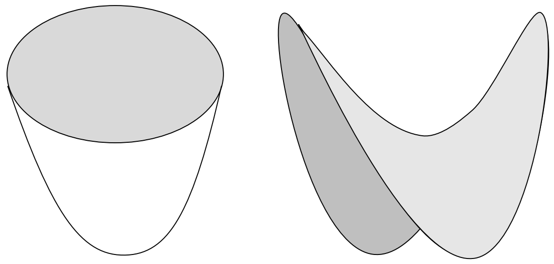
D'après la définition du quotient, $I^{\perp}$ est proportionnel à $(E/I)^{*}$. Ainsi $I^{\underline{\perp}} - \{I\}$ est identifiable à l'ensemble des hyperplans affines de B : à tout $H \in I^{\underline{\perp}}$ correspond l'hyperplan $H^{\underline{\perp}}/I \cap B$ de B, identifié à $(H) - (I)$ de B'. I correspond à l'hyperplan à l'infini de B, et les points de (I) aux hyperplans de direction isotrope. Deux hyperplans (H) et (H') sont parallèles ssi H, H' et I sont alignés.

Soit $u = 1_I$ qui servira de masse pour A (A se trouve inclus dans un espace proportionnel à E). Choisissons dans A une origine $J \in C$ (on a $\langle u|J\rangle = 1$).

Soit $F = (IJ)^{\perp}$: c'est un espace quadratique de signature (p,q). Pour tout $M \in A$, soit $z = \langle J|M\rangle$, et soit x le projeté orthogonal de M sur F, autrement dit le projeté de $\overrightarrow{JM}$ sur $J^{\perp}$ parallèlement à I ; x désigne donc un point de B muni de l'image de J comme origine, et on a $Q(x) = Q(\overrightarrow{JM})$. Cela se traduit par la décomposition $M = J + zu + x$. Remarque : z n'est par un nombre réel mais une quantité.

On trouve $Q(M) = 2z + Q(x)$. Ainsi C a pour équation $Q(x) + 2z = 0$, ou encore $z = -\frac{1}{2}Q(x)$.

Voici les noms des figures d'un espace affine pouvant être décrites par une équation de cette forme, pour les plus petites valeurs de p et q (qu'on peut échanger) :



$(0, 1)$: parabole.

$(0, 2)$: paraboloïde elliptique.

$(1, 1)$: paraboloïde hyperbolique.

Soit un point $S = J + z'u$. On a $\langle S|M\rangle = z + z'$. Ainsi l'équation de $S^{\underline{\perp}}$ est $z = -z' = -\frac{Q(S)}{2}$ et celle de (S) dans B est $Q(x) = 2z' = Q(S)$: c'est la sphère de centre J et de rayon $\sqrt{2z'}$.

Rappelons que l'origine J est quelconque ; en général on trouve :

Pour tout $S \in A$, la figure (S) de l'espace affine quadratique B est la sphère d'équation $Q(\overrightarrow{SM}) = Q(S)$, de centre l'image de S dans $B = A/I$ et de rayon $\sqrt{Q(S)}$. Si $S \in C$, pour abréger on appellera (S) le cône de sommet S.

Remarque : si p ou q est nul, les cônes sont réduits à leurs sommets, et les sphères peuvent être réduites à l'ensemble vide (elles sont alors dites imaginaires).

Sphères tangentes, sphères orthogonales.

Commençons par des figures plus générales que les sphères.

Soit F un sous-espace de A contenant J et non tangent à J en C (autrement dit, non orthogonal à J). Considérons la figure $\Gamma = F \cap B'$ de B (ou B'). On définit dans B

l'espace tangent à Γ en J comme étant le sous-espace de B qui approxime Γ au voisinage infinitésimal de J. Pour cela on remarque que $J^{\perp}$ approxime C au voisinage de J dans A. Par conséquent $F \cap J^{\perp}$ approxime $F \cap B'$, et son image dans B est bien l'espace tangent à Γ en J.

Deux figures Γ et Γ' seront donc tangentes en J ssi $F \cap J^{\perp} = F' \cap J^{\perp}$. L'unique F' tel que Γ' soit l'espace tangent à J en Γ est défini par $F' = (F \cap J^{\perp}) + I$ (autrement dit c'est celui qui contient I).

Remarquons que deux points M et N de $J^{\perp}$ sont orthogonaux ssi les images dans B des droites (JM) et (JN) sont orthogonales. En effet on a $\langle \overrightarrow{JM} | \overrightarrow{JN} \rangle = \langle M | N \rangle$. Ainsi l'orthogonalité des sous-espaces contenant J est respectée dans le passage de $J^{\perp}$ à B.

A présent voyons le cas des sphères. Soit $S \perp J$, $S \neq J$. L'hyperplan tangent à (S) en J est défini par $S^{\perp} \cap J^{\perp} = (SJ)^{\perp}$. Ainsi une sphère (S') est tangente à (S) en J ssi les points S, S', J sont alignés (et $S' \neq J$). Plus généralement deux sphères (S) et (S') sont tangentes ssi la droite (SS') est isotrope ; son noyau (le point où (SS') est tangent à C) est alors le point de tangence des sphères (S) et (S').

On appelle généralement faisceau de sphères un ensemble de sphères (S) où S décrit une droite D de P. Dans le cas où D est tangente à C en J, c'est un faisceau de sphères tangentes en J.

Deux sphères (S), (S') sont dites orthogonales ssi $S \perp S'$. Si elles ont moins un point J commun, cela se traduit par le fait qu' “elles se coupent à angle droit” : dans l'“espace quadratique” $J^{\perp}$ les hyperplans vectoriels $(SJ)^{\perp}$ et $(S'J)^{\perp}$ sont perpendiculaires.

15. Inversion et géométrie conforme.

Symétrie par rapport à une sphère, inversion.

Pour tout sous-espace régulier F de E on définit la symétrie orthogonale par rapport à F : c'est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$. Les symétries orthogonales par rapport à F et $F^{\perp}$ transforment tout élément de E en deux éléments opposés. Elles ont donc le même effet sur P. Dans cette transformation de P, les points fixes sont sur les droites de F et de $F^{\perp}$.

Cette transformation agit sur C, et par conséquent sur l'espace affine quadratique B' (aux points de (I) près).

Si $I \in F$, F correspond à un sous-espace affine de B, et on obtient la symétrie orthogonale par rapport à ce sous-espace.

Passons au cas particulier de la symétrie par rapport à une sphère (S) ($S \notin C$). On vérifie immédiatement que le symétrique M' d'un point $M \in C$ par rapport à (S) (ou : à S) est l'autre point d'intersection de (SM) avec C.

En particulier, si $S \in A - C$, le symétrique de I est le centre de (S) ; notons-le J. Pour étudier cette symétrie, interprétons-la comme étant un changement de représentation affine de P : soit $M = J + zu + x$, avec $z = \langle J | M \rangle$. Dans la nouvelle représentation, la masse est z à une constante multiplicative près. Comme S et les points de $S^{\perp}$ d'équation $2z = Q(S)$ doivent être fixes, on trouve finalement

$$M' = J + \frac{Q(S)}{2z}(u + x)$$

(le $(u+x)$ vient de $(J+x)$...). Appliquée à B' *en tant qu'espace affine quadratique*, cette transformation prend la forme

$$\overrightarrow{JM'} = \frac{Q(S)}{Q(\overrightarrow{JM})}\overrightarrow{JM}$$

(ce qui est faux dans A). On l'appelle inversion de centre J et de puissance $Q(S)$.

S, M, M' étant alignés dans A, on a en fait $\overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SM}$, où $k = \frac{Q(S)}{Q(\overrightarrow{JM})}$. Ainsi $(1-k)S = k\,M - M'$, et on peut écrire l'équation de la sphère (S) dans B' par $N \in (S) \Longleftrightarrow k\langle M|N\rangle = \langle M'|N\rangle \Longleftrightarrow Q(\overrightarrow{M'N}) = k\,Q(\overrightarrow{MN})$. (S) est donc un ensemble de points dont le rapport des distances à M et M' est constant.

On peut aussi remarquer que toute sphère contenant M et M' est orthogonale à (S) ; donc tout cercle passant par M et M' et rencontrant (S) la coupe à angle droit...

Plus généralement on peut définir dans C l'angle de deux cercles, de deux sphères, d'un cercle et d'une sphère ; angle qui peut être hyperbolique suivant les cas...

géométrie conforme.

Appelons la géométrie de C, géométrie conforme de signature $(p,\ q)$ (bien que ce terme désigne habituellement la seule présence d'une structure quadratique dans l'infiniment petit, de carré scalaire variable*.

Dans une représentation affine, toute transformation conforme qui envoie I sur un point non conjugué à I s'obtient par une inversion suivie d'une similitude (une transformation affine multipliant le produit scalaire par une constante).

Définition. Si $p+q=1$, la figure C du plan projectif P prend le nom de conique.

Corollaire 1. La géométrie interne d'une conique est celle d'une droite projective.

Cela résulte de la forme des transformations homographiques.

Ainsi, pour tout point I d'une conique C, on a un isomorphisme naturel entre les droites projectives C et P/I, laquelle s'identifie à $I^{\perp}$.

Corollaire 2. La géométrie conforme de signature $(2,\ 0)$(resp.$(1,\ 1)$) est celle d'une droite projective complexe (resp. double).

En effet l'inversion s'écrit $x \mapsto x/(x\overline{x}) = 1/(\overline{x})$, ce qui est, à conjugaison près (qui est une similitude) l'opération $x \mapsto 1/x$ caractérisant la géométrie d'une droite projective.

De façon générale un espace projectif double s'obtient à partir d'un espace double $E_1 \oplus E_2$ en étendant la notion de colinéarité à la multiplication par un nombre double. Une droite double est l'ensemble des (ax, by) où $x \in E_1$, $y \in E_2$ sont fixés non nuls et a et b décrivent $\mathbb{R}$. Elle est donc définie par le couple $(\mathbb{R}x, \mathbb{R}y)$ de droites de E_1 et E_2 respectivement. L'espace projectif double est donc le produit cartésien des espaces projectifs de E_1 et E_2.

---

* En fait, il a été démontré que cette structure infinitésimale de C permet de restituer toute sa géométrie, sauf si $p \leq 1$ et $q \leq 1$, ou encore si on ne prend qu'une partie de C avec $(p,\ q) = (2,0)$.

Exercice : démontrer que l'effet sur B' d'une symétrie orthogonale de E qui échange I avec un point J non conjugué à I s'obtient de façon unique par une inversion de centre J et de puissance positive, suivie d'une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace contenant J.

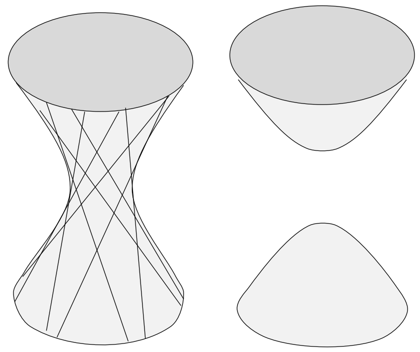
L'opération d'inverse dans $\mathbb{C}$ en est un exemple.

16. La sphère unité d'un espace quadratique.

Munissons cette fois l'espace projectif P d'un point non isotrope. A un changement de convention près on peut supposer son genre négatif, et le représenter par un vecteur Ω tel que $Q(\Omega) = -1$. L'espace affine de masse $-\Omega$ muni de l'origine Ω est un espace vectoriel F quadratique de signature $(p+1, q)$ puisqu'il est parallèle au sous-espace régulier $\Omega^{\perp}$; P s'identifie à la réunion de F et de $\Omega^{\underline{\perp}} = \underline{F}$.

Pour deux points $M = \Omega + v$ et $M' = \Omega + v'$ de F on a $\langle M|M'\rangle = \langle v|v'\rangle - 1$. On en déduit que $C \cap F$ est la sphère de centre Ω et de rayon 1, appelée sphère unité de F : $\Omega + v \in C \iff Q(v) = 1$. D'autre part, pour v fixé, l'hyperplan de niveau 1 de v, d'équation $\langle v|v'\rangle = 1$ n'est autre que l'hyperplan polaire de v.

Dans cette sphère, l'antipode d'un point est son symétrique par rapport à Ω tel qu'on l'a défini précédemment.



Voici les noms qu'on donne en géométrie affine de dimensions 2 et 3 à cette sphère, suivant les valeurs du couple $(p,\ q)$:

$(1, 0)$: ellipse.

$(0, 1)$: hyperbole.

$(2, 0)$: ellipsoïde.

$(1, 1)$: hyperboloïde à une nappe.

$(0, 2)$: hyperboloïde à deux nappes

17. Géométrie hyperbolique

Nous allons étudier ici le dernier cas, celui de l'hyperboloïde à deux nappes.

C'est la sphère unité d'un espace F de signature $(1, 2)$ qu'on peut interpréter en termes d'un espace-temps relativiste avec seulement deux dimensions spatiales.

Les points de cette sphère sont des vecteurs de genre temps de F, et se répartissent en deux nappes : une nappe passée et une nappe future. Ces deux nappes se correspondent par la relation antipodale, et sont deux copies de l'ensemble H des référentiels, dont la géométrie est appellée géométrie hyperbolique.

Pour visualiser cette géométrie dans le plan affine, il y a deux modèles : le modèle projectif de Klein respecte l'alignement ; le modèle de Poincaré ou modèle conforme respecte les angles et les cercles. A chaque fois, la raison d'être des définitions qui y sont posées se comprend par le fait qu'on peut traiter de la même manière le cas de la géométrie sphérique.

Le modèle projectif de Klein.

On considère ici le plan hyperbolique H comme une partie du plan projectif $\underline{F}$; on fait une représentation affine de $\underline{F}$ par le choix d'un référentiel R_0, en sorte que sa conique isotrope apparaît sous la forme d'une ellipse Γ de centre R_0, ou plutôt un cercle pour faire joli.

H est l'intérieur de Γ. Les points de Γ, à la frontière de H, sont les points à l'infini. Les autres points ont pour polaires les droites D qui traversent H et coupent Γ en deux points distincts.

Définition. On appelle droite du plan hyperbolique H la trace $D \cap H$ d'une droite D traversant H, autrement dit un segment reliant deux points à l'infini distincts. Par abus de langage on confondra D et $D \cap H$ sous le nom de "droite".

Deux droites sont perpendiculaires si l'une contient le pôle de l'autre. On construit facilement la perpendiculaire à une droite D passant par un point M : c'est la droite reliant M et le pôle de D.

Le modèle conforme.

Le deuxième modèle du plan hyperbolique respecte sa géométrie conforme. Autrement dit, c'est la géométrie conforme qui est sous-jacente en commun au plan hyperbolique à représenter et au plan affine euclidien de sa représentation ; et non plus la géométrie projective comme au paragraphe précédent. L'hyperboloïde à deux nappes est situé comme auparavant dans un espace projectif P de dimension 3 associé à un espace E quadratique de signature $(1, 3)$, et est de la forme $C - (\Omega)$, où Ω est un point du genre espace.

On appellera cycles les ensembles de la forme (S), si S est du genre espace, qu'on avait plus haut appelé des sphères ; dans une représentation affine, ils apparaissent comme des droites ou des cercles.

(Ω) est appelé le cycle de l'infini. Il sépare C en deux répliques de H et est constitué des points à l'infini de H. Les droites de H sont les cycles orthogonaux à (Ω), puisqu'elles sont la trace des plans de P contenant Ω (origine de F).

On retrouve dans ce cadre le plan projectif du modèle de Klein $\underline{F} = P/\Omega$: c'est l'image qu'on perçoit en plaçant son oeil au point Ω. Remarquons que cela reste aussi valable si on imagine P comme un espace affine dont le plan de l'infini est différent de $\Omega^{\perp}$, par exemple $O^{\perp}$ avec O du genre temps. C apparaît alors sous forme d'une sphère de centre O, ce qui a l'avantage d'être un objet qui nous est plus familier, qu'on peut mieux appréhender comme un tout.

Ω étant du genre espace se trouve à l'extérieur de la sphère C, éventuellement à l'infini. Vu de ce point, C apparaît comme un disque dont la silhouette est le cercle Γ image de (Ω). Il présente une partie visible et une partie cachée, correspondant aux deux nappes de l'hyperboloïde.

Les cycles du plan hyperbolique.

Nous allons classifier les cycles en géométrie hyperbolique.

Soit $S \neq \Omega$. On définit le centre du cycle (S) comme étant la position de S dans le modèle de Klein. Excluons le cas des droites $(S \perp \Omega)$ et des points $(S \in C)$. On peut alors considérer S comme un vecteur non nul de F. Notons $Q'(S)$ son carré scalaire dans F, tandis qu'on a $Q(S) = Q'(S) - 1$ (à multiplier par le carré de la masse de S si on la veut différente de 1). Notons également $\langle M || N \rangle$ le produit scalaire dans F.

On trouve 4 sortes de cycles :

• Si $0 < Q'(S) < 1$, le centre de (S) est un point de H. Soit M son représentant dans C de même orientation temporelle que S, autrement dit $\{M\} = [\Omega S) \cap C$. Alors (S) est le cercle de centre M et de rayon r tel que

$$\langle M || S \rangle = \frac{1}{\operatorname{ch} r}$$

car pour tout point N de (S), $\langle M || N \rangle = \operatorname{ch} r$ avec r =distance de M à N. Donc

$$(\operatorname{ch} r)^2 Q'(S) = 1.$$

• Si $Q'(S) > 1$, c'est un cycle imaginaire. Un tel cycle a toujours pour centre un point de H.

• Si $Q'(S) = 0$, le centre I de (S) est un point à l'infini. (S) est appellé un horicycle. Il est tangent en I à (Ω), et se trouve donc d'un seul côté de (Ω), sur une seule nappe. Dans l'espace F, c'est une parabole. Si $a \in \mathbb{R}_\star^+$, l'horicycle (aS) (la multiplication étant définie dans F), est l'ensemble des points à distance $|\log a|$ de (S) , à l'intérieur si $a > 1$ et à l'extérieur sinon.

• Si $Q'(S) < 0$, le centre de (S) étant du genre espace définit une droite (D) du plan hyperbolique. Tous les points de (S) ont une même distance r à D telle que

$$(\operatorname{sh} r)^2 Q'(S) = 1.$$

Ils sont d'un côté de (D) sur une nappe et de l'autre côté sur l'autre nappe. Dans le modèle de Klein (S) apparaît comme étant une ellipse tangente à Γ en deux points.

Le demi-plan de Poincaré.

Grâce au corollaire 2, on peut représenter la géométrie sphérique ou hyperbolique dans $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dans le premier cas, on parle de la sphère de Riemann. Dans le second cas, on utilise disque de Poincaré d'équation $|z| < 1$, ou encore le demi-plan de Poincaré d'équation $\operatorname{Im} z > 0$.

Une transformation de ce demi-plan qui conserve son orientation est de la forme

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

avec a,b,c,d réels et $ad - bc = 1$. Pour changer l'orientation il faut poser $ad - bc = 1$ mais cela échange les deux demis-plans. Donc si on veut garder le même demi-plan la formule devient

$$z \mapsto \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$$

A un nombre complexe z non réel on associe le polynôme en x :

$$\frac{2i(x-z)(x-\overline{z})}{z-\overline{z}}$$

qui est à coefficients réels. C'est un vecteur unitaire dans l'espace des polynômes de degré au plus 2 à coeffcients réels $ax^2+2bx+c$ où le carré scalaire s'écrit $ac-b^2$.

Réciproquement, si $ax^2+2bx+c=1$ une racine du polynôme est donnée par $z=\frac{-b+i}{a}$.

D'autre part, un poylnôme à racines réelles ($ac-b^2<0$), définit la droite du plan hyperbolique qui joint celles-ci.

Cela ressemble peut-être à de la magie ; on pourra réécrire cela plus proprement grâce aux tenseurs.

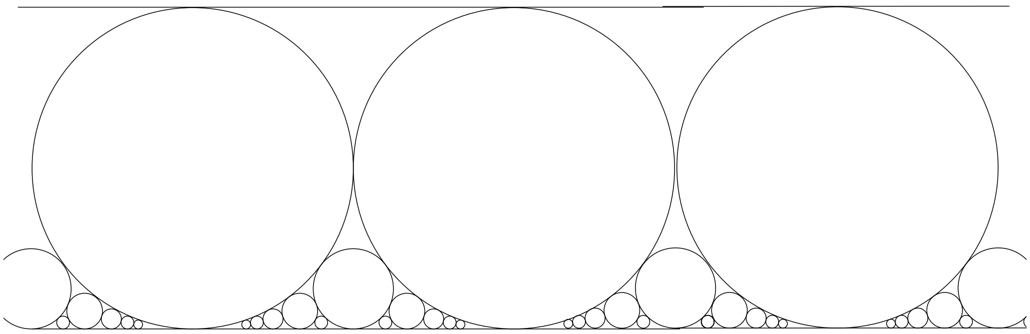
Un curieux pavage du plan hyperbolique.

Les pavages réguliers du plan et de la sphère par des polygones réguliers sont couramment connus : en notant n le nombre de sommets de chaque face et p le nombre de faces que joint chaque sommet, on a $\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$ dans le plan euclidien et $\frac{1}{n}+\frac{1}{p}>\frac{1}{2}$ sur la sphère. Réciproquement tout couple (n,p) vérifiant ces équations correspond à un pavage.

Dans le plan hyperbolique l'équation devient $\frac{1}{n}+\frac{1}{p}<\frac{1}{2}$, et possède cette fois une infinité de solutions. Nous allons ici extrapoler cette notion de pavage en étudiant le cas $n=+\infty$, $p=3$. Pour la commodité, chaque face sera figurée par son cercle inscrit (le cercle tangent à tous ses bords). Si $n=+\infty$, ces cercles sont des horicycles.

Un tel pavage s'obtient dans le demi-plan de Poincaré sous la forme des horicycles suivants. Pour chaque nombre rationnel d'écriture irréductible $\frac{p}{q}$, on note $H(\frac{p}{q})$ l'horicycle apparaîssant comme un cercle tangent à $\mathbb{R}$ au nombre $\frac{p}{q}$ et de diamètre $\frac{1}{q^2}$. De plus on définit $H(\frac{1}{0})$ comme étant la droite d'équation $\mathrm{Im}\ z=1$.

La condition pour que $H(\frac{p}{q})$ et $H(\frac{p'}{q'})$ se touchent est alors que $|pq'-p'q|=1$.



Premier calcul de la courbure d'un cycle.

On va ici calculer directement la courbure c d'un cercle d'après la variation de sa longueur l en fonction de son rayon r, de la même manière qu'on peut le faire en géométrie sphérique (la principale différence étant que les fonctions trigonométriques sin, cos... sont remplacées par les fonctions hyperboliques.)

Pour la même raison qui fait que l'accélération de pesanteur est liée à la différence d'écoulement du temps entre le haut et le bas (et expliquée dans les "Modèles cosmologiques" pour montrer que "la vitesse d'expansion est égale à la courbure"), on trouve que $\frac{dl}{l} = c\ dr$. Or on trouve facilement $l = 2\pi \operatorname{sh} r$. Comme $d \operatorname{sh} r = \operatorname{ch} r dr$, on en tire

$$c = \frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh} r} = \coth r.$$

En plus on peut calculer facilement l'aire a du cercle. L'aire comprise entre deux cercles concentriques infiniment proches vaut $da = l\ dr = 2\pi \operatorname{sh} r\ dr = 2\pi\ d \operatorname{ch} r$. Donc $a - 2\pi \operatorname{ch} r$ est une constante, qui vaut -2π pour $r = 0$. Finalement $a = 2\pi(\operatorname{ch} r - 1) = cl - 2\pi$. On obtient ainsi l'égalité entre aire et "angle de déviation du véhicule spécial" dont la proportionnalité avait été vaguement justifiée dans le cas de la géométrie sphérique. Cette relation témoigne que la courbure riemannienne (que j'avais appelée "courbure interne") est égale à -1.

18. Courbure riemannienne ; géométries à courbure constante.

On définit plus généralement des géométrie à courbure constante (indépendante de la position et de la direction) en signature quelconque en appliquant la même construction. Cette courbure se manifeste de la façon suivante : deux droites voisines et "parallèles" au voisinage d'un point s'attirent si leur direction est de genre positif, et se repoussent si elle est de genre négatif. En effet soit D une "droite de C" passant par un point $M \in C$, définie par un plan vectoriel K de l'espace F. Sa direction L est l'orthogonal de M dans K, parallèle à la droite tangente en M à C dans K. Si elle est de genre positif, K est un plan euclidien et $D = K \cap C$ est un cercle de diamètre la droite K. Donc en suivant D dans l'un ou l'autre on rejoint les points N et $-N$ d'intersection de C avec L. Une autre droite "parallèle à D au voisinage de M" la recoupera aux points N et $-N$, donc "elles s'attirent".

Lorsque la direction de ces droites est de genre temps, ce phénomène prend le nom d'effet de marée : deux objets voisins subissant l'effet de la gravitation d'un corps éloigné, comme deux points de la Terre subissant l'effet de la Lune (sauf qu'ici cet effet dépend de la direction).

Remarquons que la géométrie à coubure négative du plan hyperbolique par opposition à la courbure positive de la géométrie sphérique s'est obtenue en changeant par convention la signature de la structure conforme de (2,0) à (0,2) : toutes les directions ont pris le genre négatif, en sorte qu'une courbure riemannienne "toujours égale à 1 par définition" appliquée à des directions de genre négatif a l'effet d'une courbure riemannienne négative.

Nous allons reformuler les choses en sorte que la courbure riemannienne devienne une quantité quelconque (toujours constante).

Prenons cette fois un vecteur Ω non nul quelconque de E. Soit A l'espace affine d'équation $\langle \Omega | M \rangle = 1$. Dans $C' = C \cap A$ les distences se calculent normalement : $Q(\overrightarrow{MN}) = -2\langle M|N \rangle$. mais ceci ne correspond à la distance mesurée le long d'une droite de C' que si M et N sont infiniment voisins. Alors la courbure riemannienne de C' vaut $-Q(\Omega)$.

Voyons maintenant comment se transforme cette distance lorsqu'on change de représentation de C en choisissant un Ω'. Toujours si M et N sont infiniment voisins, leurs nouvelles positions M' et N' vérifient

$$\langle M'|N'\rangle = \frac{\langle M|N\rangle}{\langle\Omega'|M\rangle\langle\Omega'|N\rangle} \Rightarrow \mathbb{Q}(\overrightarrow{M'N'}) = \frac{Q(\overrightarrow{MN})}{\langle\Omega'|M\rangle^2}.$$

Deuxième calcul de la courbure d'un cycle.

Nous allons à présent calculer la courbure d'un cycle (S) du plan hyperbolique (ou de la sphère) en l'examinant au voisinage infinitésimal d'un de ses points M.

On posera ici que la signature de E est $(3,1)$.

utilisons la représentation affine de C définie par le point I symétrique de M par rapport à (Ω). De cette façon, M apparaîtra comme le centre du cycle de l'infini (Ω). Plus précisément on supposera $I - \Omega = xM$, en sorte que $\langle I|M\rangle = \langle\Omega|M\rangle = 1$ (d'où $Q(\Omega) = -2x$). Au voisinage de M les distances ne diffèrent qu'au second ordre de celles du plan hyperbolique : si $\langle I|N\rangle = 1$ on a

$$\langle\Omega|N\rangle = 1 - x\langle M|N\rangle \approx 1.$$

On en déduit que (S) posède la même courbure dans cette représentation : son rayon apparent étant $\frac{\sqrt{Q(S)}}{\langle I|S\rangle}$ on a

$$c = \frac{\langle I|S\rangle}{\sqrt{Q(S)}} = \frac{\langle\Omega|S\rangle}{\sqrt{Q(S)}}.$$

Pour le voir autrement, remarquons que si $Q(S) = 1$ on peut écrire $S = T + cM$, où (T) est la droite tangente à (S) en M : $T \perp \Omega$ et $Q(T) = 1$. Alors, pour un point N voisin de M, $\langle T|N\rangle \approx \pm$distance de N à (T), et $\langle M|N\rangle = \frac{-1}{2}Q(\overrightarrow{MN})$. Alors on voit que l'équation $\langle S|N\rangle = 0$ de (S) décrit en fait comment N s'éloigne de (T) suivant sa distance à M.

19. L'approximation non-relativiste.

La relativite restreinte relie les unités de temps et d'espace par la vitesse de la lumière $c = 300000$ km/s. C'est une vitesse très élevée qui peut être considérée comme infiniment grande dans beaucoup de problèmes. On doit alors retrouver l'espace-temps classique comme un modèle approché de l'espace-temps relativiste. Voyons comment.

On va ici encore se contenter des dimensions x et t.

Au point de coordonnées (t, x) on associe le nombre double $t + \frac{\hat{\imath}x}{c}$. Posons $\varepsilon = \frac{\hat{\imath}}{c}$ et $k = \frac{1}{c^2}$. On manipule alors des nombres de la forme $t + \varepsilon x$, avec $\varepsilon^2 = k$.

En relativité restreinte on a $k > 0$. En géométrie euclidienne on a $k < 0$ (avec les nombres complexes). En changeant les unités (donc en faisant varier la valeur numérique de c) on fait varier k. Dans l'approximation non-relativiste, c est un infiniment grand donc on pose $k = 0$. On manipule ε comme un nombre infiniment petit.

En faisant toujours comme avec les nombres complexes et doubles, on trouve $|t + \varepsilon x|^2 = t^2$. L'ensemble des quantités infiniment petites forme le sous-espace des vecteurs spatiaux. En appliquant la définition de l'exponentielle, on trouve directement

$$\exp(a + \varepsilon b) = (1 + \varepsilon b) \exp a.$$

On remarque que les nombres infiniment petits forment un sous-espace, et c'est normal : en général des vecteurs peuvent être considérés "infiniment petits" lorsqu'ils apparaissent nuls pour un certain espace de formes linéaires...

L'espace des vecteurs de ce plan affine a la géométrie d'un plan vectoriel isotrope, non totalement isotrope. On en déduit que les "cycles" dans cette géométrie sont les paraboles dont le point à l'infini est la direction spatiale. C'est la ligne d'univers d'une particule en accélération constante ; on l'obtient à partir de l'hyperbole décrivant le même phénomène en relativité (cf. l'horizon d'un trou noir) en zoomant dessus à l'infini, à l'ordre 1 en t et à l'ordre 2 en x.

L'énergie cinétique

Nous allons voir à présent comment on passe de l'énergie cinétique relativiste à l'énergie cinétique classique.

En relativité, considérons un système matériel dans un référentiel R_0donné. Notons p son quadrivecteur quantité de mouvement, E son énergie, $\overrightarrow{p}$ sa quantité de mouvement spatiale et m sa masse. Rappelons que, pour m fixé, le vecteur $p = (E, \overrightarrow{p})$ se situe sur une nappe d'hyperboloïde à deux nappes. Comme la vitesse du système est faible devant celle de la lumière c, on ne considère qu'une petite portion de la nappe, au voisinage de R_0 (on fait un zoom). Elle apparaît en première approximation comme un espace affine euclidien ; mais si on zoome suffisamment suivant la direction temporelle, elle apparaît comme un paraboloïde elliptique. (Cette opération revient à envoyer le centre Ω de l'hyperboloïde à l'infini en rendant $Q(\Omega)$ infiniment petit petit puisque le paragraphe 18 en a fait une quantité quelconque.)

Pour exprimer cela par des formules : l'énergie totale est approximativement dictée par la masse, mais comme on s'intéresse à ses petites variations (pour décrire le paraboloïde), il faut lui donner une grandeur différente : on définit l'énergie de masse $E_0 = mc^2$ et l'énergie cinétique $E' = E - E_0$. On a alors :

$$\begin{gathered} E_0^2 = E^2 - p^2 c^2 \\ p^2 c^2 = E'(E + E_0) \approx 2E' E_0 \\ E' \approx \frac{p^2}{2m} \approx \frac{mv^2}{2} \end{gathered}$$

où $v = \frac{pc^2}{E}$ est la vitesse du système.

Ainsi on trouve l'équation du paraboloïde. Cependant ce modèle présente le défaut de séparer l'énergie qui se conserve en deux quantités qui ne se conservent pas (la masse et l'énergie cinétique). Nous allons donc le corriger.

En supposant toujours les vitesses faibles devant celles de la lumière, l'énergie cinétique peut se convertir en infime variation de masse, que nous pouvons négliger.

Cette énergie ne se conserve donc pas, pourtant l'expérience nous parle d'une énergie qui se conserve. On ne peut pas, en effet, convertir à volonté de la masse en énergie. C'est que, en l'absence de réactions nucléaires, le nombre d'atomes de chaque espèce se conserve, et cela détermine la masse de manière approximative. Les autres conditions (liaisons chimiques, chaleur) n'ont sur la masse qu'un effet négligeable et peuvent varier ; on les classe donc du côté de l'énergie.

On a donc un plan vectoriel de coordonnées (masse, énergie) seulement muni de la direction "pure énergie" orthogonale à la mesure de la masse (on retrouve un sous-espace de quantités infiniment petites...). Les autres directions représentent les états énergétiques de la matière (l'énergie "par unité de masse") ; elles forment une droite affine D.

Remarque : comme il y a plusieurs sortes d'atomes, on a affaire à un objet plus compliqué, analogue à la construction de "la représentation logarithmique des quantités positives". Cependant, par mesure de simplicité, nous allons ici négliger ce fait.

Revenons à notre paraboloïde. On part de l'espace vectoriel de ce qui se conserve : la masse comptée d'après le nombre d'atomes présents, l'énergie et la quantité de mouvement. La mesure de la masse définit un espace affine A, muni d'une direction verticale I. L'espace affine A/I est celui des référentiels. Toute droite de direction I est identifiable à D, et à chaque état u correspond un paraboloïde de A, d'après la correspondance suivante :

En choisissant un référentiel, de la matière se trouvant l'état $u \in D$ et animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ possède une énergie $E = mu + m\frac{v^2}{2}$ donc les coordonnées de sa position dans A sont $(\overrightarrow{v}, u + \frac{v^2}{2})$.

On peut y voir une analogie avec l'énergie potentielle de pesanteur, la quantité $u + \frac{v^2}{2}$ jouant le rôle de l'altitude. Prenons l'exemple d'un gaz (enfermé dans une boîte pour fixer les idées). Il est constitué de molécules en agitation, et sa chaleur est l'expression de l'énergie cinétique des atomes (l'énergie d'une molécule réside essentiellement dans le mouvement de ses atomes individuels). Donc il y a un seul état d'énergie pour les atomes, et dans l'espace A ils sont étalés à la surface du paraboloïde correspondant. Le centre d'inertie de l'ensemble se trouve à un état d'énergie plus élevé (qui est son altitude puisque la vitesse totale est nulle), celui de l'ensemble du gaz d'un point de vue macroscopique (i.e. à notre échelle).

Dernière analogie : on peut comparer l'énergie cinétique au moment d'inertie d'un solide dans un plan.

Le moment d'inertie $\mathcal{I}$ d'un solide par rapport à un point M du plan est sa résistance à acquérir une vitesse de rotation autour de ce point (comme la masse est la résistance à acquérir une vitesse). C'est-à-dire que pour une vitesse de rotation donnée en nombre de tours par seconde, l'énergie cinétique est proportionnelle à $\mathcal{I}$.

En supposant que le solide tourne autour de M, on définit sa vitesse angulaire ω par la formule de la vitesse $\overrightarrow{v}$ de tout point N en termes de nombres complexes :

$$\overrightarrow{v} = i\omega\overrightarrow{MN}.$$

On obtient l'énergie cinétique en intégrant sur l'élément de masse dm situé en tout point N du plan transformé en paraboloïde :

$$E = \int \frac{|v|^2}{2} dm = \frac{\omega^2}{2} \int Q(\overrightarrow{MN})$$

$$\Rightarrow \mathcal{I} = \int Q(\overrightarrow{MN}) dm = -2 \int \langle M|N \rangle = -2 \langle M| \int N dm \rangle.$$

Ainsi, c'est le centre pondéré d'inertie $\int N dm$ du solide dans l'espace affine A qui intervient.

20. Topologie en dimension 2.

Il s'agit de classifier les surfaces considérées en elles-mêmes, indépendamment de toute représentation dans un espace à trois dimensions, en s'autorisant toute déformation élastique. Il s'agit d'une géométrie sous-jacente à toutes les autres (projective, conforme...).

On suppose qu'on peut les découper en un nombre fini de petits morceaux déformables en polygones et donc aussi en disques. Puis on recolle les morceaux et on regarde au fur et à mesure ce qui se passe.

Au départ on a des disques : par exemple un petit cercle sur une sphère la découpe en deux morceaux : un disque et une sphère à un trou, qui ont la même topologie. Le plan hyperbolique et le plan affine en sont des exemples (penser à une représentation affine de la géométrie elliptique).

Plus généralement dans n'importe quelle surface on peut découper un petit disque, et cela lui ajoute un bord. On peut toujours compter le nombre de bords présents (on en prend un et on en fait le tour, puis on en prend un autre...). Leur position n'a aucune importance : en les imaginant petits, on peut les déplacer comme on veut par déformation.

Enfin on peut faire des recollements entre les bords d'une même surface ou de surfaces différentes, ou encore de deux parties d'un même bord. On appelle somme connexe de deux surfaces la surface obtenue en faisant un trou dans chacune pour les recoller ensemble. Additionner une sphère équivaut à ne rien faire. Par conséquent, lorsqu'on additionne des surfaces entre elles on peut les imaginer comme étant des boursoufflures flottant sur une même sphère.

Nous allons voir qu'il y a trois objets élémentaires qu'il suffit d'additionner pour former toutes les surfaces : le bord B, le plan projectif P et le tore T.

Exemples : un hyperboloïde à une nappe a la topologie d'une sphère avec deux bords : il suffit de le projeter sur une sphère de même centre O au moyen des demi-droites issues de O. Cela s'appelle un ruban.

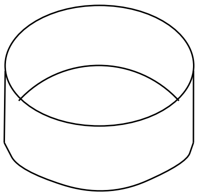
Un plan projectif P s'obtient en recollant le bord d'un disque à lui-même, chaque point étant relié au point diamétralement opposé. Ce bord donne une ligne de la surface qui n'a qu'un côté. Si on visualise P comme étant une sphère où on identifie les points antipodaux, c'est une ligne qui relie chacun de ses points à son antipode, et donc découpe la sphère en deux morceaux symétriques l'un de l'autre et équivalents à un disque. On remarque que P est une surface non orientable : un objet et son image miroir, chacun indiquant un sens de rotation, ne sont pas différents pour la surface dans son ensemble, puisqu'on les échange en transportant cet objet d'un point à son antipode dans la représentation sphérique.

On remarque que la condition pour qu'une surface soit non orientable est qu'on puisse y trouver un P : lorsqu'on promène un objet pour renverser son orientation, le chemin suivi est une ligne à un côté ; en l'entourant par une ligne voisine on isole un P.

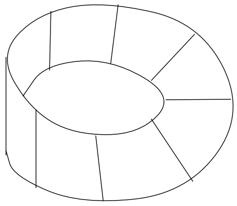
On a vu un exemple de tore : la droite projective double, produit cartésien de deux droites projectives réelles. C'est une surface orientable.

Remarquons qu'il y a en principe plusieurs manières différentes de recoller deux bords donnés. D'une part, il faut choisir la correspondance entre les sens de parcours des deux bords (en fait, cela n'a pas d'influence dans le cas de la somme connexe). D'autre part, on peut ne faire qu'un recollement partiel, mais alors la seule différence avec le recollement total est qu'il laisse un ou deux bords de plus qui serait refermé “comme une fermeture éclair” si on achevait le recollement.

Si on colle ensemble deux bouts d'un même bord, dans un sens on obtient un ruban ($2B$), et dans l'autre un ruban de Moebius ($P + B$). Un exemple de ruban de Moebius est donné par la représentation projective de la géométrie courbe de signature $(1, 1)$: c'est l'extérieur d'une conique du plan projectif (un plan projectif avec un trou).

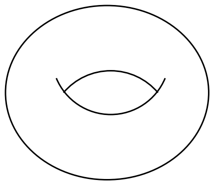


Ruban

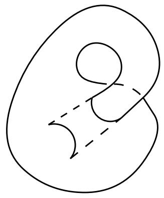


Ruban de Moebius

Si on colle entièrement deux bords d'une même surface, dans un sens on obtient un tore T et dans l'autre une bouteille de Klein, égale à $2P$ puisque le plan de symétrie la découpe en deux rubans de Moebius.



Tore



Bouteille de Klein

Enfin, cette dernière distinction ne peut pas se faire si la surface est déjà non orientable. Autrement dit : $T + P = 3P$.

Conclusion : toute surface sans bord se ramène soit à nP ($n > 0$), soit à nT. Les dernières sont orientables, les premières ne le sont pas. Enfin, quelle que soit la manière de découper la surface en f faces (de vraies faces, déformables en disques), a arêtes et s sommets, (ou régions, frontières...), on a $f + s - a = 2 - n$ dans nP et $f + s - a = 2 - 2n$ dans nT : c'est la caractéristique d'Euler. On peut se ramener au cas $f = s = 1$.

21. Exercices.

1) Soit une droite D du plan affine, munie d'une origine O et sur laquelle sont marqués deux points a et b considérés comme quantités de la grandeur D. On veut construire sur D le point ab/a+b(=1/1/a+1/b). On dispose uniquement d'une règle non graduée et d'un traceur de parallèles (n'importe à quoi cela peut ressembler, c'est un exercice théorique).

2) Dans l'exercice 1), le traceur de parallèles est-il indispensable, et si oui pour combien d'utilistions au minimum ?