Nouvelle méthode de résolution des équations du 3eme degré

(rédigée à l'occasion du prix Fermat junior de mathématiques 1995)
Sylvain Poirier
http://spoirier.lautre.net

C'était un exposé de cinq pages, plus un dessin fait à la main. Il commençait par une approche géométrique (en termes de forme trilinéaire symétrique dans l'espace $\mathbb{C}^2$), qui pouvait être déroutante à première vue. Suivait une approche trigonométrique, puis la méthode algébrique, et enfin un lien entre ces méthodes, et un calcul passant de la présente solution à celle de Cardan.

Le fichier avait été perdu. En voici une nouvelle rédaction plus courte, présentant les deux aspects les plus importants en pratique: les approches algébrique et trigonométrique. L'approche algébrique consiste à effectuer une transformation homographique de l'inconnue.

1) Résolution algébrique

On se propose de résoudre l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0 \tag{1}$$

en la mettant sous la forme:

$$(x-u)^3 + \lambda(x-v)^3 = 0. \tag{2}$$

avec $u \neq v$. On développe:

$$(1+\lambda)x^3 - 3(u+v\lambda)x^2 + 3(u^2+v^2\lambda)x - (u^3+v^3\lambda) = 0,$$

et on veut identifier à un facteur près les coefficients de cette équation avec ceux de (1). On remarque que la suite $(1+\lambda, u+v\lambda, u^2+v^2\lambda, u^3+v^3\lambda)$ est une suite de termes consécutifs d'une suite récurrente d'équation:

$$u_{n+2} - (u+v)u_{n+1} + (uv)u_n = 0.$$

La condition sur u et v pour qu'il existe un λ tel que les deux équations soient proportionnelles, est donc que la suite $(1, -a, b, -c)$ vérifie la même équation de récurrence:

$$\begin{aligned} b + (u+v)a + uv &= 0 \\ c + (u+v)b + uva &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Ce système linéaire d'inconnues $(u+v)$ et (uv) se résoud immédiatement:

$$\begin{aligned} u+v &= \frac{c-ab}{a^2-b} \\ uv &= \frac{b^2-ac}{a^2-b} \end{aligned}$$

Ainsi u et v sont les deux solutions de l'équation

$$(a^2-b)y^2 + (ab-c)y + (b^2-ac) = 0 \tag{4}$$

Avant de continuer, on va noter ici les deux types d'exceptions possibles:

D'une part, on peut avoir $a^2-b=0$. Cela traduit le fait que l'équation (1) est de la forme $(x+a)^3 = a^3-c$, que l'on sait résoudre.

D'autre part, l'équation (4) peut avoir une racine double. Dans ce cas, cette racine double est également racine au moins double de (1).

En effet, faisons le changement de variable

$$X = x - \frac{u+v}{2} = x - \frac{c-ab}{2(a^2-b)}. \tag{5}$$

On voit à l'allure de (2) qu'une même translation appliquée à u et v doit globalement préserver le système (3). On se ramène donc au cas où $u + v = 0$. Alors, la racine double de (4) ainsi transportée devient $u = v = 0$ ce qui réduit (3) à $b = c = 0$. Ce résultat substitué dans (1) donne immédiatement 0 racine au moins double. Comme c'est la même translation qui a été appliquée et qui donne la même racine double pour les deux systèmes, les deux racines doubles étaient donc égales au départ.

Nous supposerons dorénavant que l'on n'est dans aucune des exceptions ci-dessus.

L'équation (1) aura trois racines réelles si et seulement si l'équation (4) n'a aucune racine réelle: car alors on travaille dans l'ensemble des nombres complexes, et l'opération racine cubique que l'on va introduire aura trois résultats à traiter de la même manière; par contre, si (4) a ses racines réelles, alors, comme on travaille dans l'ensemble des réels, l'opération racine cubique a un résultat privilégié (celui qui est réel), qui donnera l'unique solution réelle de (1). On peut remarquer que cette situation est exactement la même que dans la résolution de Cardan des équations du troisième degré (bien que l'équation de degré 2 à résoudre soit différente de celle-ci).

Continuons la résolution: ayant trouvé u et v, on calcule λ:

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & u+\lambda v \\ 1 & -a \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (a+v)\lambda + (a+u) = 0$$

L'équation (1) s'écrit donc

$$\left(\frac{x-u}{x-v}\right)^3 = -\lambda = \frac{a+u}{a+v}$$

et la solution finale s'écrit

$$x = v + \frac{u-v}{1+\sqrt[3]{\lambda}} \tag{6}$$

Remarque: on choisit arbitrairement quelle solution de (4) sera nommée u, l'autre étant nommée v. Dans les deux cas, les trois valeurs de la racine cubique figurant dans (6) donnent les trois racines de (1), mais dans un ordre différent.

2) Rappel de la méthode trigonométrique usuelle

A cette méthode algébrique correspond une méthode trigonométrique de la même manière qu'à la méthode algébrique de Cardan correspondait également une méthode trigonométrique que nous rappelons ici (cette méthode pouvant notamment servir à résoudre ces équations au moyen d'une calculatrice qui ignore les nombres complexes).

Voici donc d'abord un rappel de la version trigonométrique de la méthode de Cardan:

Pour le cas d'une équation dont les trois racines seraient réelles, on rappelle l'identité

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

On cherche alors à mettre une équation du troisième degré réduite:

$$x^3 + px + q = 0$$

sous la forme

$$\begin{cases} x = \alpha\cos\theta \\ \cos(3\theta) = \gamma \end{cases}$$

En développant, on trouve

$$4(\alpha^{-1}x)^3 - 3(\alpha^{-1}x) - \gamma = 0$$

et l'identification des coefficients à un facteur près donne

$$\begin{cases} p = \dfrac{-3\alpha^2}{4} \\ q = \dfrac{-\gamma\alpha^3}{4} \end{cases}$$

soit finalement

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{-4p}{3}} \\ \gamma = \dfrac{-4q}{\alpha^3} \end{cases}$$

La solution s'exprime au moyen des fonctions cos et Arccos.

Cette méthode de fonctionne plus dans les situations suivantes, correspondant aux cas où il n'y a qu'une racine réelle (on exclut le cas $p = 0$ qu'on sait résoudre):

Premier cas: $p > 0$. Il faut alors se servir de la fonction sinus hyperbolique:

$$\operatorname{sh}(3\theta) = 4\operatorname{sh}^3\theta + 3\operatorname{sh}\theta$$

Deuxième cas: $p < 0$ et $\gamma = \frac{-4q}{\alpha^3} > 1$. On utilise alors la fonction cosinus hyperbolique:

$$\operatorname{ch}(3\theta) = 4\operatorname{ch}^3\theta - 3\operatorname{ch}\theta,$$

et si $\gamma < -1$, on utilise la fonction $(-\operatorname{ch})$, qui obéit à la même formule.

3) Version trigonométrique de la nouvelle solution

On part de l'identité suivante (si l'équation à résoudre possède trois racines réelles distinctes): en posant $t = \tan\theta$, on a

$$t^3 - 3t + (1 - 3t^2)\tan(3\theta) = 0$$

ce qui s'obtient facilement en considérant la partie imaginaire de $(1 - it)^3(1 + i\tan(3\theta))$.

A partir de l'équation (1), on se ramène au cas où $c = ab$ à l'aide du changement de variable (5).

Puis on cherche à exprimer l'équation obtenue

$$X^3 + 3AX^2 + 3BX + AB = 0$$

sous forme du système

$$\begin{cases} X = \alpha\tan\theta \\ \tan(3\theta) = \gamma \end{cases}$$

En développant suivant l'identité ci-dessus, on trouve

$$(\alpha^{-1}X)^3 - 3(\alpha^{-1}X) + \gamma(1 - 3(\alpha^{-1}X)^2) = 0.$$

et l'identification des coefficients à un facteur près donne

$$\begin{cases} A = -\alpha\gamma \\ B = -\alpha^2 \end{cases}$$

soit finalement

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{-B} \\ \gamma = \dfrac{-A}{\alpha} \end{cases}$$

La solution s'exprime au moyen des fonctions tan et Arctan.

Cette méthode de fonctionne plus dans les cas où il n'y a qu'une racine réelle. Alors, on remplace l'usage de la fonction tangente par celui d'une des deux fonctions tangente hyperbolique ou cotangente hyperbolique, qui vérifient la même identité:

$$\operatorname{th}^3\theta + 3\operatorname{th}\theta - (3\operatorname{th}^2\theta + 1)\operatorname{th}(3\theta) = 0$$
$$\coth^3\theta + 3\coth\theta - (3\coth^2\theta + 1)\coth(3\theta) = 0$$